COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Febrero. Modelo B

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios 5 y 6 en otra hoja de examen, en el espacio que necesite.

Se permite el uso de calculadora no programable, si la calculadora no tiene más de dos líneas de salida.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) Sea $f(x,y) = \left(e^x y^4, y\cos x^3\right)$. Determinar su matriz jacobiana.
   Solución:

2. (1 PUNTO) Estudie si la curva $\mathbf{x} : [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{x}(t) = \left(\cos t, e^t - t, t^4\right)$ es regular.
   Solución:

3. (1 PUNTO) Demuestre que la curvatura de una recta es 0.
   Solución:

Solución(continuación):

4. (1 PUNTO) Determínense el vector tangente y la recta tangente, en $\mathbf{x}(0)$, a la curva de ecuaciones paramétricas

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^2 \cos t, t\operatorname{sen} t, 3t\right).$$

Solución:

EJERCICIOS

5. (3 PUNTOS) Sea la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (t^3 + t^2 - t - 1, t^2 - 1).$$

   a) Escríbase como una curva de Bézier considerando $t \in [0, 1]$.
   b) Estudie si es una curva regular para $t \in \mathbb{R}$. Estudie si tiene puntos múltiples para $t \in \mathbb{R}$ y determínelos, en caso de que los tenga.

Nota: Cada apartado puntúa 1.5 puntos.

6. (3 PUNTOS) Sea S la superficie dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u \cos v, \operatorname{sen} v, u^3\right).$$

   a) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental de la superficie en el punto $\mathbf{x}(1, 0)$.
   b) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental de la superficie en el punto $\mathbf{x}(1, 0)$.
   c) Sea C la curva en la superficie S, determinada si consideramos $(u(t), v(t)) = \left(t^2 + 1, \pi t\right)$ para $t \in [-1, 1]$. Determine el vector tangente a esta curva a partir de $\mathbf{x}_u$ y $\mathbf{x}_v$. No se considerará respuesta válida la que lo determina sin considerar estos vectores.

Nota: Cada apartado puntúa 1 punto.

Formulario

Curvas

Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k(t) = \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k(x,y) = \frac{(-f_y, f_x)\, H(f)\, (-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

Curvas en el espacio:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3},$$
$$\tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Superficies

Formas fundamentales:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v.$$
$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}.$$

Curvaturas:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$
$$H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Ecuación de las direcciones principales:

$$k^2\left(EG - F^2\right) - (Eg - 2Ff + Ge)\, k - f^2 + eg = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(eF - fE)(du)^2 + (eG - gE)\, dudv + (fG - gF)(dv)^2 = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

$$e(du)^2 + 2f dudv + g(dv)^2 = 0.$$